

運動方程式（ニュートンの運動方程式）

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$\mathbf{r}$: 位置ベクトル

$r = |\mathbf{r}|$: 距離

$\mu = GM$: 重力定数



オービタルダイナミクス

ORBITAL DYNAMICS

ケプラー軌道の要素

- 長半径 a
- 離心率 e
- 傾斜角 i
- 昇交点赤経 Ω
- 近地点引数 ω
- 平均近点角 M

角運動量ベクトル

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$h = |\mathbf{h}| = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

比エネルギー

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

v : 速度の大きさ

r : 距離

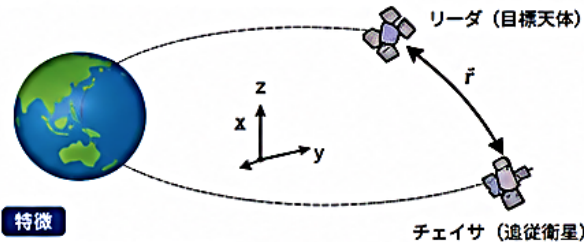
μ : 重力定数



1. レンデーストモデルとCWモデル

レンデースト (非線形モデル)

近距離での相対運動を高精度に表す非線形モデル。
追従・ドッキングなどの精密な相対運動に適用。



特徴

- 非線形の2体運動を基礎
- 大きな相対距離・長時間運動に対応
- 推力 (Δv) や姿勢変化を考慮可能
- 数値積分で解を求める (例: Runge-Kutta法)

CWモデル vs レンデースト非線形モデル 比較

項目	CWモデル (線形相対運動モデル)	レンデースト非線形モデル
適用範囲	相対距離が小さい (追従体が目標に近い)	相対距離が大きい場合や 長時間の運動に適用
モデルの前提	円軌道上の小さな摂動を 線形近似	2体問題の非線形運動方程式 (必要に応じて推力も考慮)
数学モデル	線形微分方程式 (解析解あり)	非線形微分方程式 (数値積分が必要)
長所	- 計算が速い - 解析解があり理解しやすい - 制御設計に便利	- 大きな相対運動に対応 - 推力・外乱などを厳密に反映 - 現実的な運動を高精度で表現
短所	- 適用範囲が狭い - 大きな相対距離に不適 - 長時間予測の誤差が増大	- 計算コストが高い - 解析解がない - モデルパラメータの設定が必要
主な用途	近距離での相対運動解析、 制御設計の初期検討	ランデースト全フェーズの精密解析・ シミュレーション

2. デブリの軌道決定に必要な要素とモデル

1. 観測方式 (Observation)



- 望遠鏡による光学観測 (角度観測)
- レーダ観測 (距離・ドップラー速度)
- 得られるデータ: 方位角、仰角、距離、ドップラー周波数など

2. 軌道決定方式 (Orbit Determination)



- 観測データから最も妥当な軌道を推定
- 少数観測: Gauss法、Laplace法などで初期軌道を推定
- 多数観測: 最小二乗法、カルマンフィルタ等で精密に推定

3. 軌道予測方式 (Orbit Prediction)



- 決定した軌道を将来にわたり予測
- 力学モデル (重力、J2、大気抵抗、太陽放射圧など) を用いて数値積分
- 長期予測には摂動モデルや標準軌道モデルを使用

3. GP4/SDP4モデル (TLE配布用の標準モデル)

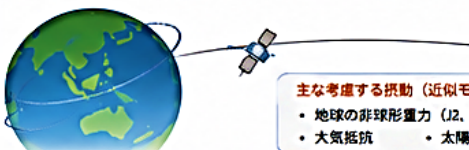
人工衛星の軌道要素 (TLE: Two-Line Element) から
位置・速度を計算するための標準モデル。
主に地球周回衛星の軌道予測に広く使用されている。

TLEとは?

- 衛星の軌道要素を2行で表現した形式
- 世界中で配布され、軌道予測の標準データ

TLEの例

```
1 25544U 98067A 24145.51041667 .00001264 00000-0 29676-4 0 9993
2 25544 51.6421 112.0441 0005667 86.5691 35.6885 15.49425284567899
```



モデルの概要

- GP4: 近地点高度 約220 km ~
遠地点高度 約36,000 km
(LEO~MEO領域)
- SDP4: 遠地点高度 36,000 km 超
(高軌道・深宇宙領域)

モデルの特徴

- SGP4の改良版 (深宇宙軌道にも対応するSDP4を含む)
- 摂動を近似した準解析的モデル
- 計算が高速で、長期予測に適す
- 広く公開されており、相互運用性が高い

主な考慮する摂動 (近似モデル)

- 地球の非球形重力 (J2, J3, J4)
- 大気抵抗
- 太陽・月の重力摂動
- 太陽放射圧

4. 少数観測から初期軌道を求める方法 (Gauss法, Laplace法)

少数の角度観測データから、衛星の位置・速度 (初期軌道) を求める古典的手法。
得られた初期軌道を精密軌道決定の初期値として使用する。

Gauss法 (3点観測)

概要: 時刻 t_1, t_2, t_3 の3点観測 (方向のみ) から
位置ベクトルを求める手法。

基本式 (概要)

- 観測方向単位ベクトル
 $\hat{p}_i = [\cos \alpha_i \cos \delta_i, \sin \alpha_i \cos \delta_i, \sin \delta_i]^T$
(α_i : 方位角, δ_i : 仰角)

- スカラー量 D_0 の計算: $D_0 = \hat{p}_1 \cdot (\hat{p}_2 \times \hat{p}_3)$

- 地心位置ベクトルの決定:

$$\mathbf{r}_2 = A_1 \hat{p}_1 + A_2 \hat{p}_2 + A_3 \hat{p}_3$$

- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$ も同様に決定し、速度は微分で求める

Laplace法 (3点観測)

概要: 角速度の時間変化が小さいと仮定した近似法。

基本式 (概要)

- 角速度ベクトルの近似: $\boldsymbol{\omega} = \frac{\hat{p}_3 - \hat{p}_1}{t_3 - t_1}$

- 観測方向と角速度から中点の位置方向を推定:

$$\hat{p}_2 \approx \frac{\hat{p}_3 + \hat{p}_1}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{p}_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{2}$$

- 距離 ρ_2 を幾何学的・力学的関係から近似

- 位置・速度を決定 (Gauss法より計算が簡便)

比較 (一般的傾向)

項目	Gauss法	Laplace法
仮定	一般的 (仮定少)	角速度一定近似
計算量	多い	少ない
精度	高い	やや低い
推奨用途	高精度を要する場合	初期値の簡易推定

※ いずれも少数観測からの“おまかな軌道”を得る
ための手法であり、
その後の精密決定 (最小二乗法・カルマンフィルタ等)
が必要。

5. 軌道決定の全体フロー: 観測データ → 初期軌道 → 精密決定 → 軌道予測

① 観測データ (角度観測)



- 望遠鏡による角度観測
(方位角・仰角)
- 時刻 $t_1, t_2, t_3, \dots$
- 観測点の位置 (地球上)

出力: 観測データ (角度)

② Gauss / Laplace法
(少数観測から初期軌道を推定)

- 観測方向から位置ベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ を推定
- 速度ベクトル $\mathbf{v}_2$ を計算
- 初期状態 ($\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$) を得る

出力: 初期軌道 (位置・速度の初期値)

③ 初期軌道 (おまかな軌道)

- 誤差を含むが軌道の大まかな形が分かる
- 精密決定の初期値として使用

出力: 初期軌道 (状態ベクトル)

④ 精密決定へ

- 多数観測データを使用
- 最小二乗法、カルマンフィルタ等で
軌道を精密に推定

出力: 精密軌道 (高精度の状態推定)

⑤ 軌道予測 (将来予測)

- 力学モデルを用いて将来位置を予測
- 摂動 (重力、J2、大気抵抗、太陽光圧等)
を考慮した数値積分

出力: 将来軌道の予測結果

用語ミニ解説

角度観測: 望遠鏡で測る方位角・仰角などのデータ

TLE: Two-Line Element の略、衛星軌道要素を
2行で表現した標準フォーマット

摂動: 衛星の軌道に影響を与える外力 (重力の非球形、
大気抵抗、太陽光圧など)

初期軌道: 少数データから得られるおまかな軌道

精密決定: 多くの観測を用いて誤差を最小化し、高精度
の軌道を推定すること

まとめ: デブリの軌道決定は「観測 → 初期軌道推定 (Gauss/Laplace) → 精密決定 → 軌道予測」という流れで行われ、目的に応じて適切なモデルと手法を選択することが重要です。

スペースデブリ近接・衝突解析の流れ

観測から衝突確率評価、回避判断までの全体プロセス

スペースデブリや運用中の人工衛星の軌道を解析し、近接や衝突の危険性を評価します。
衝突確率が閾値を超える場合は、回避マニョバを計画・実施し、安全を確保します。

① 軌道データ取得

地上観測や軌道情報から、衛星やデブリの現在の軌道状態を取得



地上レーダー



光学望遠鏡

TLE・軌道情報 (Space-Track等)

1 25540U 99067A 24145.51041667 .000124 00000-0 29067-4 0 9991
2 23564 51.6431 87.3570 0006700 36.4007 64.2871 15.493115716326049



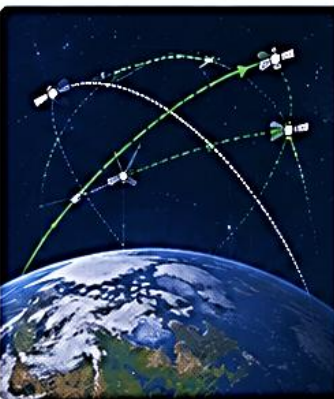
出力

衛星・デブリの初期軌道(位置・速度)
および共通の時刻基準

② 軌道予測

力学モデルを用いて将来の軌道を予測

- SGP4 / 数値積分
- 地球重力場 (J2, J3, ...)
- 太陽放射圧
- 太陽風圧
- 第三天体の影響 など



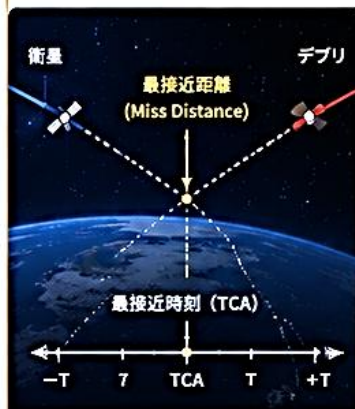
出力

将来の軌道(位置・速度の時系列データ)
軌道誤差(共分散行列)

③ 近接解析 (Conjunction Assessment)

予測軌道を比較し、近接する可能性のある事象を検出・評価

- 最接近時刻 (TCA) を算出
- 最接近距離 (Miss Distance) を算出
- 近接候補の抽出 (例: 一定距離以内)



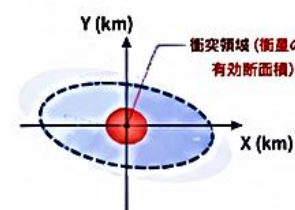
出力

TCA、Miss Distance、相対速度、
近接事象リスト

④ 衝突確率解析

軌道の不確かさを考慮して、衝突する確率 (P_c) を計算

- 軌道誤差を共分散楕円で表現
- 相対位置・相対速度の分布を評価
- 衝突確率 P_c を計算
- モンテカルロシミュレーションによる検証



衝突確率 P_c の例

$P_c < 1.0E-6$: 安全 (監視継続)
 $1.0E-6 \leq P_c < 1.0E-4$: 注意 (頻繁に監視)
 $P_c \geq 1.0E-4$: 危険 (回避検討)

出力

衝突確率 (P_c)、信頼区間、
解析レポート

監視継続
定期的に再解析

⑤ 衝突回避マニョバ (CAM)

衝突リスクを低減するための
軌道変更を計画・実施

- 回避軌道の計画 (ΔV 、時刻、方向)
- 燃料消費の評価
- 軌道変更の実施
- 軌道再予測・近接解析の再実行
- 安全確認後、監視に戻る



出力

回避軌道、実施結果、
再解析レポート

主な入力データ



観測データ
(レーダー・光学)



軌道情報 (TLE等)



衛星・デブリの
物理特性
(大きさ・形状・質量)

解析で使用する主要要素

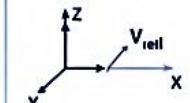
軌道力学モデル



軌道誤差 (共分散)



相対運動 (Hill座標系)



衝突判定 (P_c 計算)



回避計画 (CAM)



目的

- ✓ 衝突の危険性を早期に検知
- ✓ 衝突確率を定量的に評価
- ✓ 必要に応じて回避マニョバを実施
- ✓ 宇宙空間の安全な利用を確保

用語解説

TCA (Time of Closest Approach)

最接近時刻: 2天体が最も近づく時刻

Miss Distance

最接近距離: 最も近づいたときの距離

P_c (Probability of Collision)

衝突確率: 軌道誤差を考慮した衝突する確率

Covariance (共分散)

軌道の位置・速度の不確かさを表す行列

CAM (Collision Avoidance Maneuver)

衝突回避マニョバ: 軌道を変更して衝突を回避する操作

軌道決定に使う「ベイズの重み付き最小二乗法」と「共分散行列」

要点まとめ

1. 軌道決定とは？

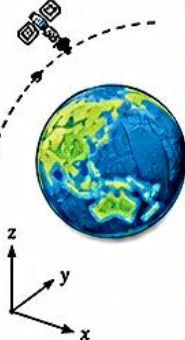
観測データから、衛星（デブリ）の位置と速度（6つの状態量）をできるだけ正確に推定すること。

状態ベクトル（6次元）

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

位置 (m) : x, y, z
速度 (m/s) : v_x, v_y, v_z

x, y, z : 位置
 v_x, v_y, v_z : 速度



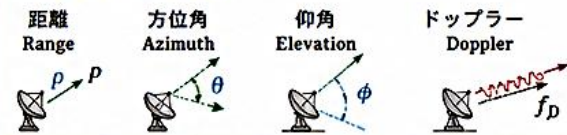
2. 観測モデル（直接は測っていない）

地上局などが測るのは距離・角度・ドップラーなど。状態量から観測値が決まる（観測モデル）。

$$y = h(x) + \varepsilon$$

y : 観測ベクトル（距離・角度など）
 $h(x)$: 観測モデル（その状態なら何が観測されるか）
 ε : 観測誤差（平均 0）

例：地上局からの観測量



観測は誤差を含むため、複数の観測を最適に組み合わせる必要がある。

3. ベイズの重み付き最小二乗法（BWLS）

評価する量（コスト関数）

観測と計算の差（残差）と、事前情報（今回の推定値）から外れすぎないように評価する。

$$\text{残差: } r = y - Hx$$

$$J = (y - Hx)^T R^{-1} (y - Hx) + (x - x_0)^T P_0^{-1} (x - x_0)$$

前半：観測からの情報（残差を小さく）
後半：事前情報からの情報（不自然な外れを防ぐ）

最適解（推定値）と共分散

$$\hat{x} = x_0 + K(y - Hx_0) \quad (\text{カルマンゲイン})$$

$$K = P_0 H^T (H P_0 H^T + R)^{-1}$$

$$P = (I - KH) P_0 \quad (\text{推定後の共分散行列})$$

記号の意味

y : 観測ベクトル
 H : 観測感度行列（次元）
 R : 観測誤差の共分散行列
 x : 推定する状態ベクトル
 x_0 : 事前の状態（予測値）
 P_0 : 事前の共分散行列

ポイント

- ✓ 誤差の小さい観測ほど強く使う（重み付け）
- ✓ 過去の情報も不確かさに応じて活用する（ベイズ）
- ✓ 推定値とその不確かさ P が同時に得られる

4. 観測の重み付け：共分散行列 R

観測の品質はそれぞれ異なる。標準偏差が小さいほど信頼できる。

観測誤差の共分散行列 R

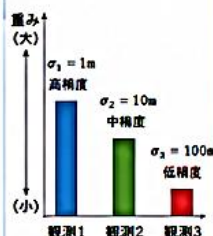
$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

σ_i^2 : i 番目の観測の分散（誤差の大きさ）

重み行列 $W = R^{-1}$
(重み $w_i = 1 / \sigma_i^2$)

誤差が小さい観測ほど重みが大きくなり、推定に強く影響する。

重みのイメージ

5. 共分散行列 P の意味（推定の不確かさ）

推定値の誤差 $\delta x = x - \hat{x}$ の共分散 $P = E[\delta x \delta x^T]$ は、誤差の大きさと方向、状態量同士の関係を表す。

例：2次元位置の共分散行列

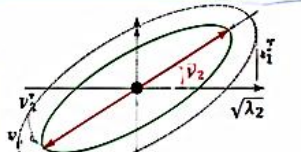
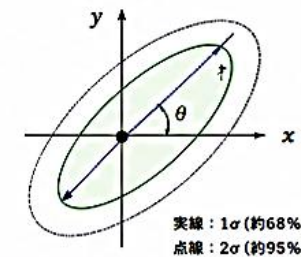
$$P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

- ・ 対角成分：各方向の分散（不確かさの大きさ）
 $\sigma_x = \sqrt{P_{11}}, \sigma_y = \sqrt{P_{22}}$
- ・ 非対角成分：相関（誤差の関係）
 $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (-1 \leq \rho_{xy} \leq 1)$

固有値分解の意味

P の固有ベクトル = 誤差が伸びる主軸方向
固有値の平方根 = その方向の標準偏差
⇒ 誤差楕円の長さや向きを決める

誤差楕円のイメージ



6. 共分散の時間伝搬（誤差は時間とともに変化）

軌道を未来へ伝搬すると、誤差も一緒に伝搬する。

状態の伝搬

$$x(t) = f(x(t_0), t)$$

誤差の伝搬（線形近似）

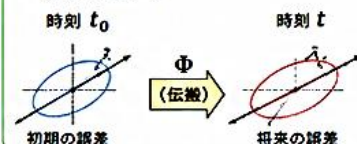
$$\delta x(t) = \Phi(t, t_0) \delta x(t_0)$$

共分散の伝搬

$$P(t) = \Phi(t, t_0) P(t_0) \Phi^T(t, t_0)$$

状態遷移行列 Φ の意味

初期の誤差が将来の状態にどのように影響するかを表す“感度の地図”。



位置と速度の相関も大切

速度のわずかな誤差は、時間が経つと位置の誤差になる。その関係は P の非対角ブロック P_{rv}, P_{vr} が表す。

$$P = \begin{bmatrix} P_{rr} & P_{rv} \\ P_{vr} & P_{vv} \end{bmatrix}$$

P_{rr} : 位置と位置の誤差
 P_{vv} : 速度と速度の誤差
 P_{rv} : 位置と速度の誤差の関係

行列の役割まとめ

行列	一言でいうと	物理的な意味
H (観測感度行列)	状態→観測の感度表	状態を少し変えたら観測がどれだけ変わるか
R (観測共分散行列)	観測の信頼度	観測装置をどれだけ信頼できるか
P (状態共分散行列)	推定の不確かさ	推定した軌道をどれだけ信頼できるか
Φ (状態遷移行列)	誤差の伝わり方	現在の誤差が未来でどうなるか

流れのまとめ



キーマッセージ

- ✓ 行列は「多数の関係をまとめて扱うための器」。
- ✓ 共分散行列は「誤差の大きさ・方向・状態量同士の関係」を表す。
- ✓ ベイズの重み付き最小二乗法は「観測の情報」と「過去の情報」を不確かさに応じて統合する。
- ✓ 軌道決定では「推定値」と「その不確かさ」をセットで扱うことが、安全な運用・衝突回避の基礎になる。

行列の数学モデル — 行列は「関係をまとめた変換の仕組み」 —

一言まとめ

行列は、入力となる複数の量を、決められたルール（関係）で出力に変換するモデル

1. 行列とは何か？

行列は、数字を縦横に並べたものですが、本質は「複数の量の関係を表すモデル」です。

例：2つの入力から2つの出力が決まる関係

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{行列で表すと}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

出力 (結果) 行列 A (関係・変換) 入力 (原因)

各成分の意味

- $a_{11} = 2$: x_1 が y_1 に与える影響の大きさ (2倍)
- $a_{12} = 3$: x_2 が y_1 に与える影響の大きさ (3倍)
- $a_{21} = 1$: x_1 が y_2 に与える影響の大きさ (1倍)
- $a_{22} = 4$: x_2 が y_2 に与える影響の大きさ (4倍)

まとめ

行列の各成分 a_{ij} は、「入力の j 番目の量が、出力の i 番目の量に、どのくらい影響するか」を表す係数です。

2. 行列は「変換器」と考える

入力ベクトルを行列に通すと、出力ベクトルに変換されます。

$$\begin{matrix} \text{入力} & & \text{行列 A} & & \text{出力} \\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & & A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & & y = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \text{(原因)} & & & & \text{(結果)} \end{matrix}$$

$\xrightarrow{\quad} \boxed{A} \xrightarrow{\quad}$

計算のしくみ (行列のかけ算)

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 \\ 1 \times 1 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1行目の計算
(行と列の内積)

2行目の計算
(行と列の内積)

ポイント

「行列×ベクトル」は、各行とベクトルの内積を計算して、新しいベクトル (出力) を作る操作です。

3. なぜ行列を使うのか？

方程式がたくさんある問題でも、行列なら一つの式にまとめられます。

例：3つの入力から2つの出力

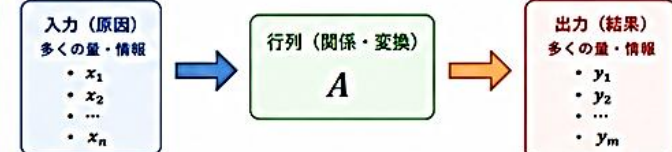
$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

↓ 行列で表すと

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

活用例

- ・ 物理現象のモデル化
 - ・ 構造計算 (力と変位の関係)
 - ・ 制御工学 (状態の更新)
 - ・ 画像処理・AI (データ変換)
 - ・ 測量・統計・経済モデルなど
- 幅広い分野で利用される共通の数学言語です。



4. 行・列の意味

一般に、行列 A が m 行 n 列の場合：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

列 (j) = 入力側の変数
それぞれの入力は何を表すか

行 (i) = 出力側の変数
それぞれの出力は何を表すか

イメージ：高度・時間・速度が温度と圧力に影響するモデル

$$\begin{bmatrix} \text{温度} \\ \text{圧力} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{高度} \\ \text{時間} \\ \text{速度} \end{bmatrix}$$

出力 (観測量) 入力 (要因)

5. 特別な行列

① 単位行列 (I)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ix = x$$

何もしない (そのまま通す) 変換

② 逆行列 (A^{-1})

$$Ax = y \text{ のとき}$$

$$x = A^{-1}y$$

$$A^{-1}A = I$$

出力から入力に戻す変換 (元に戻すための行列)

③ 転置行列 (A^T)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

行と列を入れ替えた行列

6. 行列の基本演算

① 行列の和

$$A + B$$

(同じ大きさ同士)
対応する成分同士を足す

② 行列の積

$$AB$$

(A の列数 = B の行数)
「変換を連続して行う」ことを表す

③ スカラー倍

$$kA$$

(k : 定数)
すべての成分を k 倍

④ 行列とベクトルの積

$$Ax$$

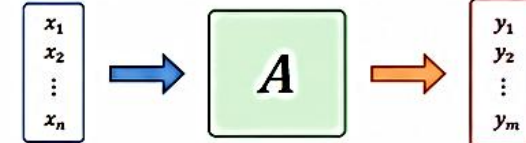
(変換の実行)
入力ベクトルを出力ベクトルへ変換

7. まとめ：行列の本質

行列は「多数の関係を、一つにまとめて表現するモデル」

- 行列は、入力と出力の関係 (変換ルール) を表す。
- 各成分 a_{ij} は、入力の j 番目が出力の i 番目に与える影響の大きさ。
- 行列を使うと、多数の方程式を一つの式にまとめられる。
- 行列の演算により、複雑な関係を効率よく処理できる。

入力 (原因) 行列 (関係・変換) 出力 (結果)

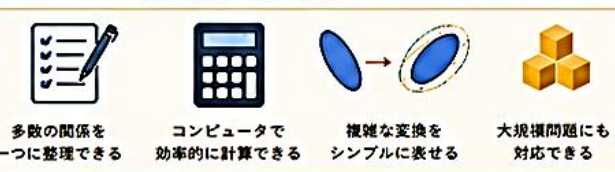


行列は「変換の仕組み」を数学で表したものだ

行列のサイズ (形) と意味

形 ($m \times n$)	例	意味
2×2	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	2つの入力から2つの出力
$m \times n$	一般の行列	n 個の入力から m 個の出力
$n \times n$	正方行列	入力と出力の数が同じ (特に重要)

行列を使うと何が便利か？



図形的なイメージ (2次元の場合)

行列は、ベクトルや図形を「回す・伸ばす・つぶす・せん断する」などの変換を行う。

